厳密に解ける量子力学系と経路積分

防衛大学校　応用物理学科

迫田　誠治

講演の内容

- 井戸型ポテンシャルと経路積分
- 井戸型ポテンシャルとChebyshev多項式
- 厳密に解けるSchrödinger方程式（形状不変性と可解性）
- 形状不変性を持つ系の経路積分と点変換
- Heisenberg形式での厳密解（正弦座標と可解性）
- 正弦座標とコヒーレント状態
- 経路積分への応用
- まとめ

考察対象は１自由度の量子力学

$$H=\frac{1}{2m}p^2+V(x),\quad m=1,\,\hbar=1$$

1　井戸型ポテンシャル

- **ポテンシャル**

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- **固有関数**

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Feynman**核**

$$K(a, b; T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n T/\hbar} \psi_n(a) \psi_n(b),\ E_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(n+1)\pi}{L} \right\}^2$$

- **これ経路積分？**

$$K(a,b;T) = \text{壁で偶数回反射} + \text{壁で奇数回反射}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{\frac{i}{2T}(a-b+2nL)^2} - e^{\frac{i}{2T}(a+b-2nL)^2} \right\}$$

- **位置の完全系**

$$\int_0^L |x\rangle\langle x|\, dx = 1,\ \text{運動量の固有関数はない}$$

$$\Longrightarrow \exp\left[\frac{i}{2\Delta t} \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1})^2 \right] \text{は作れない}$$

でも

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\, i\, \Delta t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{\frac{i}{2\Delta t}(x_j - x_{j-1} + 2nL)^2} - e^{\frac{i}{2\Delta t}(x_j + x_{j-1} - 2nL)^2} \right\}$$

が正しいFeynman核となっている

- 位置の完全系と運動量の完全系とを用いて、Schrödinger方程式からFeynman核の経路積分表示を導く事はできない
- 壁（固定端）での反射を考慮すれば自由粒子の経路積分のように考えることも可能？
- 結果的に正しいが、はじめはSchrödinger方程式との関係が不明

2　井戸型ポテンシャルとChebyshev多項式

固有関数

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}$$

$$= \psi_0(x) U_n(\eta(x)), \quad \eta(x) = \cos \frac{\pi x}{L}$$

第2種Chebyshev多項式

$$U_n(\eta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \theta = \frac{\pi x}{L}$$

規格化と直交性

$$\int_{-1}^{1} U_m(\eta) U_n(\eta) \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta = \frac{\pi}{2} \delta_{m\,n}$$

隣接３項間漸化式

$$\boxed{\eta U_n(\eta) = \frac{1}{2} U_{n+1}(\eta) + \frac{1}{2} U_{n-1}(\eta)}$$

Hamiltonian

$$H = -\frac{1}{2m}\partial_x^2 = -\mathcal{R}\mathcal{D}_\eta^2,$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \ \mathcal{D}_\eta = -\sqrt{1-\eta^2}\,\partial_\eta$$

Hamiltonianの因子化 $E_0 = \mathcal{R} \to \mathcal{E}_0 = 0,\ H \to \mathcal{H} = H - \mathcal{R}$

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{R}\left(\mathcal{D}_\eta^\dagger - \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)\left(\mathcal{D}_\eta - \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)}$$

閉関係式(Odake-Sasaki)

$$\boxed{[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \eta]] = \eta R_0(\mathcal{H}) + [\mathcal{H}, \eta] R_1(\mathcal{H}),}$$

$$R_0(\mathcal{H}) = \mathcal{R}(4\mathcal{H} + 3\mathcal{R}), \ R_1(\mathcal{H}) = 2\mathcal{R}$$

閉関係式が成立 $\iff$ η **は正弦**(sinusoidal)**座標**

η **の時間発展は正弦的：**

$$\boxed{e^{i\mathcal{H}t}\eta e^{-i\mathcal{H}t} = a^{(+)}e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t} + a^{(-)}e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}$$

$$\alpha_\pm(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}\left\{R_1(\mathcal{H}) \pm \sqrt{R_1^2(\mathcal{H}) + 4R_0(\mathcal{H})}\right\}$$

生成・消滅演算子

$$\boxed{a^{(\pm)} = \{\pm[\mathcal{H}, \eta] \mp \eta\alpha_{\mp}(\mathcal{H})\} \frac{1}{\alpha_+(\mathcal{H}) - \alpha_-(\mathcal{H})}}$$

$$a^{(+)}|\psi_n\rangle = A_n|\psi_{n+1}\rangle,\ a^{(-)}|\psi_n\rangle = C_n|\psi_{n-1}\rangle$$

規格化された状態に関する隣接３項間漸化式(今は$B_n = 0$)

$$\eta|\psi_n\rangle = A_n|\psi_{n+1}\rangle + B_n|\psi_n\rangle + C_n|\psi_{n-1}\rangle, \quad C_n = A_{n-1}$$

B_n は閉関係式の右辺に定数項がある場合に現れる

- Hamiltonian の因子化はSUSYQM＋形状不変性につながり、井戸型を含むSchrödinger形式での可解な模型の系列へと導く
- Odake-Sasakiの正弦座標の存在は、井戸型がHeisenberg 形式で解ける事を意味している
- 正弦座標の正振動数、負振動数部分から生成・消滅演算子を（何種類か）定義できる
- 消滅演算子の固有状態（コヒーレント状態）を定義できる
- コヒーレント状態を用いた経路積分が構成できないか？

3　厳密に解けるSchrödinger方程式

SUSYQM $\psi_{0,+}(x;a) = e^{-W(x;a)}$

$$A(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_x + W'(x;a)\right),\ A(a)\psi_{0,+}(x;a) = 0$$

Hamiltonian($H_+(a)\psi_{0,+}(x;a) = 0$: $E_0(a) = 0$)

$$H_+(a) = A^\dagger(a)A(a), \quad H_-(a) = A(a)A^\dagger(a)$$

超対称固有値方程式

$$H_+\psi_{E,+}(x) = E\psi_{E,+}(x), H_-\psi_{E,-}(x) = E\psi_{E,-}(x)$$
$$A\psi_{E,+}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,-}(x),\ A^\dagger\psi_{E,-}(x) = \sqrt{E}\psi_{E,+}(x)$$

形状不変性

$$A(a)A^{\dagger}(a) = A^{\dagger}(a_1)A(a_1) + R(a_1),\ a_1 = f(a)$$

$H_+(a)$ の固有値と固有関数

$$\psi_{n,+}(x;a) = \frac{A^{\dagger}(a)A^{\dagger}(a_1)\ldots A^{\dagger}(a_{n-1})}{\sqrt{E_n(a)E_{n-1}(a_1)\cdots E_1(a_{n-1})}}\psi_{0,+}(x;a_n),$$

$$E_n(a) = \sum_{k=1}^{n} R(a_k),\ a_n = f(a_{n-1}),\ a_0 = a, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

$A(a)$ は消滅演算子？

$$A(a)\psi_{0,+}(x;a) = 0$$

コヒーレント状態？

$$A(a)\psi_\lambda(x;a)=\lambda\psi_\lambda(x;a) \quad \Longrightarrow \quad \psi_\lambda(x;a)\propto\psi_{0,+}(x;a)e^{\sqrt{2}\lambda x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*_{ik/\sqrt{2}}(x;a)\psi_{ik/\sqrt{2}}(x';a)\,dk\propto\delta(x-x')$$

$$\int\psi^*_\lambda(x;a)\psi_{\lambda'}(x;a)\,dx=?$$

使えそうもない・・・

4　形状不変性を持つ系の経路積分と点変換

Path-integral solutions for shape-invariant potentials using point canonical transformations

R. De, R. Dutt and U .Sukhatme, Phys. Rev, A **46**, 6869 (1992)

ポテンシャル

$$V(r,\theta) = \frac{c^2 - 1/4}{2r^2\sin^2\theta} + \frac{d^2 - 1/4}{2r^2\cos^2\theta}$$

に対する Energy-dependent Green's function **の連続表示経路積分に** Duru-Kleinert**の**formalism**を適用**

そもそもの連続表示経路積分の根拠が分からない・・・

このポテンシャルをもつ経路積分は

Path integration of one-dimensional three-body problem with three-body forces

D. C. Khandekar and S. V. Lawande, J. Math. Phys. **18**, 712 (1977)

によって解かれているのでそれを利用

あとは連続表示のDuru-Kleinert**経路積分で**point canonical transformations(PCT) **を実行し種々の形状不変なポテシャルの経路積分を解決**

読み物としては面白いけど、真面目な経路積分の計算とはみなせない

Supersymmetry and Quantum Mechanics

F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995)

5　Heisenberg形式での厳密解

典型的な可解系 $\mathcal{H}\psi_n(x) = \mathcal{E}_n\psi_n(x)$,

$\mathcal{E}_0(=0) < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \cdots$

$$\psi_n(x) = \psi_0(x)P_n(\eta(x)) \quad \left[\int \psi_n(x)\psi_{n'}(x)\,dx = \delta_{n,n'}\right]$$

$P_n(\eta)$ **は** η **の** n **次多項式で** $\{P_n(\eta)|\,n = 0, 1, 2, \ldots\}$ **は（規格化された）直交多項式系**

$P_{-1}(\eta) = 0$ **と約束して、３項間漸化式**

$$\eta\psi_n = A_n\psi_{n+1} + B_n\psi_n + A_{n-1}\psi_{n-1}$$

が成り立つ

正弦座標(sinusoidal coordinate) $\eta(x)$

$$[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta]]=\eta R_0(\mathcal{H})+[\mathcal{H},\eta]R_1(\mathcal{H})+R_{-1}(\mathcal{H})$$

Heisenberg operator

$$e^{i\mathcal{H}t}\eta e^{-i\mathcal{H}t}=a^{(+)}e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}+a^{(-)}e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}-\frac{R_{-1}(\mathcal{H})}{R_0(\mathcal{H})},$$

$$\alpha_\pm(\mathcal{H})=\frac{1}{2}\left\{R_1(\mathcal{H})\pm\sqrt{R_1^2(\mathcal{H})+4R_0(\mathcal{H})}\right\},$$

$$a^{(\pm)}=\left\{\pm[\mathcal{H},\eta]\mp\left(\eta+\frac{R_{-1}(\mathcal{H})}{R_0(\mathcal{H})}\right)\alpha_\mp(\mathcal{H})\right\}\frac{1}{\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})}.$$

３項間漸化式から

$$e^{i\mathcal{H}t}\eta|\psi_n\rangle e^{-i\mathcal{E}_n t}$$

$$=A_n|\psi_{n+1}\rangle e^{i(\mathcal{E}_{n+1}-\mathcal{E}_n)t}+B_n|\psi_n\rangle+A_{n-1}|\psi_{n-1}\rangle e^{i(\mathcal{E}_{n-1}-\mathcal{E}_n)t}$$

これは

$$e^{i\mathcal{H}t}\eta|\psi_n\rangle e^{-i\mathcal{E}_n t}$$

$$=a^{(+)}|\psi_n\rangle e^{i\alpha_+(\mathcal{E}_n)t}+a^{(-)}|\psi_n\rangle e^{i\alpha_-(\mathcal{E}_n)t}-|\psi_n\rangle\frac{R_{-1}(\mathcal{E}_n)}{R_0(\mathcal{E}_n)}$$

とも表される。

$$a^{(+)}|\psi_n\rangle=A_n|\psi_{n+1}\rangle,\ a^{(-)}|\psi_n\rangle=A_{n-1}|\psi_{n-1}\rangle,\ B_n=-\frac{R_{-1}(\mathcal{E}_n)}{R_0(\mathcal{E}_n)}$$

エネルギー固有値と固有関数の決定

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \alpha_+(\mathcal{E}_n),\ \mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{E}_n = \alpha_-(\mathcal{E}_n),$$

$$\alpha_\pm(\mathcal{E}_n) = \frac{1}{2}\left\{R_1(\mathcal{E}_n) \pm \sqrt{R_1^2(\mathcal{E}_n) + 4R_0(\mathcal{E}_n)}\right\},$$

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= \frac{a^{(+)}}{A_{n-1}}|\psi_{n-1}\rangle \\ &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} A_k}\{a^{(+)}\}^n|\psi_0\rangle. \end{aligned}$$

コヒーレント状態

$$a^{(-)}|\psi_n\rangle = A_{n-1}|\psi_{n-1}\rangle$$

$a^{(-)}$ の固有ベクトル

$$a^{(-)}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \Longrightarrow \quad |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\prod_{k=0}^{n-1} A_k}|\psi_n\rangle,$$

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\alpha')^n}{\prod_{k=0}^{n-1} A_k^2}$$

$w(\alpha^*\alpha)$ を重み関数として

$$\int_0^\infty w(u) u^n \, du = \prod_{k=0}^{n-1} A_k^2$$

ならば

$$\int \frac{d\alpha \, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^*\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

but ...

$$\langle\alpha|\mathcal{H}|\alpha'\rangle = ?$$

6　正弦座標とコヒーレント状態

調和振動子の場合

1. **生成・消滅演算子は位置（正弦座標）演算子の負および正振動数部分**
2. $(\text{消滅演算子})^\dagger = (\text{生成演算子})$
3. $\mathcal{H} \propto (\text{生成演算子})(\text{消滅演算子})$

正弦座標 η **に付随する** $a^{(\pm)}$ **は、上記1および2は満足するが3は必ずしも成立しない。そこで**

$$a = a^{(-)} f(\mathcal{H}), \quad a^\dagger = f(\mathcal{H}) a^{(+)}$$

を考える。

$$a^\dagger a|\psi_n\rangle = \{f(\mathcal{E}_n)\}^2 A_{n-1}^2 |\psi_n\rangle$$

$$\{f(\mathcal{E}_n)\}^2 A_{n-1}^2 = \mathcal{E}_n$$

$$a^\dagger a|\psi_n\rangle = \mathcal{E}_n|\psi_n\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H} = a^\dagger a$$

新たなコヒーレント状態

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle\alpha|\mathcal{H}|\alpha'\rangle = \alpha^*\alpha'\langle\alpha|\alpha'\rangle$$

これは使えそう！

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle \quad \Longrightarrow \quad a|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_{n-1} f(\mathcal{E}_n) |\psi_{n-1}\rangle$$

$$\alpha|\alpha\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi_n\rangle$$

$$c_n = \frac{\alpha}{f(\mathcal{E}_n) A_{n-1}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{\gamma_n}},$$

$$\gamma_n = \prod_{k=1}^{n} \{f(\mathcal{E}_k) A_{k-1}\}^2 = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{\gamma_n}} |\psi_n\rangle, \quad \gamma_n = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$$

---

1. **調和振動子** $\mathcal{E}_k = k \quad \Longrightarrow \gamma_n = n!$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle$$

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{\alpha^* \alpha'}$$

$$\int \frac{d\alpha \, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^* \alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1, \quad w(\alpha^* \alpha) = e^{-\alpha^* \alpha}$$

2. 井戸型など

$$\mathcal{E}_k = k^2 + \nu k \quad \Longrightarrow \gamma_n = n!\,\Gamma(n+\nu+1)/\Gamma(\nu+1)$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(n+\nu+1)/\Gamma(\nu+1)}} |\psi_n\rangle$$

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)(\alpha^*\alpha')^n}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}$$

$$= {}_0F_1(\nu+1, \alpha^*\alpha') = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(\alpha^*\alpha')^{\nu/2}} I_\nu(2\sqrt{\alpha^*\alpha'})$$

$$w(\alpha^*\alpha) \overset{?}{=} \frac{(\alpha^*\alpha)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1) I_\nu(2\sqrt{\alpha^*\alpha})}$$

正しい重み関数 $w(\alpha^*\alpha)$ **を見付けられれば**

$$\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^*\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

$\alpha = \sqrt{u}\, e^{i\theta}$ **と置いて**

$$\frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} = du\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^*\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = \int_0^\infty du\, w(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\gamma_n} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

$$\int_0^\infty du\, w(u) u^n = \gamma_n$$ **であればよい**

井戸型の場合の重み関数

$$\gamma_n = \frac{n!\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}$$

$$n!\Gamma(n+\nu+1) = \int_0^\infty ds\, dt\, e^{-s-t} s^n t^{n+\nu}$$
$$= \Gamma(\nu+1) \int_0^\infty du\, w(u) u^n \quad [st = u \text{ と変換}]$$

$$w(u) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty e^{-(t+t/u)} t^{\nu-1}$$
$$= \frac{2u^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} K_{-\nu}(2\sqrt{u})$$

```
In[2]:= Integrate[Exp[-(t + u/t)] t^(a - 1),
         {t, 0, Infinity}, Assumptions → a > 0 && u > 0]
Out[2]= 2 u^(a/2) BesselK[-a, 2 √u]

In[3]:= Integrate[
         2 u^(n + a/2) BesselK[-a, 2 Sqrt[u]],
         {u, 0, Infinity}, Assumptions → a > 0 && n ≥ 0]
Out[3]= Gamma[1 + n] Gamma[1 + a + n]
```

$\mathcal{E}_n = n(n+\nu)$ の系

$$\boxed{w(u) = \frac{2u^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} K_\nu(2\sqrt{u})}$$

$$\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^*\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^*\alpha) \langle \alpha' | \alpha \rangle \langle \alpha | \alpha'' \rangle \\
=&\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} \frac{2(\alpha^*\alpha)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} K_\nu(2\sqrt{\alpha^*\alpha}) \\
&\times \frac{\Gamma(\nu+1)}{(\alpha'^*\alpha)^{\nu/2}} I_\nu(2\sqrt{\alpha'^*\alpha}) \frac{\Gamma(\nu+1)}{(\alpha^*\alpha'')^{\nu/2}} I_\nu(2\sqrt{\alpha^*\alpha''}) \\
=&\frac{\Gamma(\nu+1)}{(\alpha'^*\alpha'')^{\nu/2}} I_\nu(2\sqrt{\alpha'^*\alpha''}) \\
=&\langle \alpha' | \alpha'' \rangle
\end{aligned}
$$

7　経路積分への応用

正弦座標に付随した消滅演算子 $a^{(-)}$ から $a = a^{(-)} f(\mathcal{H})$ を定義し、その固有状態をコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ とすれば

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{\gamma_n}} |\psi_n\rangle, \quad \gamma_n = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$$

$$|\psi_n\rangle = \frac{\{a^{(+)}\}^n}{\prod_{k=1}^{n} A_{k-1}} |\psi_0\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{\gamma_n}} |\psi_0\rangle, \quad a^\dagger = f(\mathcal{H}) a^{(+)}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger \alpha)^n}{\gamma_n} |\psi_0\rangle$$

Schrödinger 方程式の解を経由しない直接的な表示

1. 調和振動子 $\mathcal{E}_n = n$

$$|\alpha\rangle = e^{a^\dagger \alpha}|\psi_0\rangle$$

2. 井戸型など $\mathcal{E}_n = n(n+\nu)$

$$|\alpha\rangle = {}_0F_1(\nu+1, a^\dagger \alpha)|\psi_0\rangle$$

完全性の式

$$\int \frac{d\alpha\, d\alpha^*}{\pi} w(\alpha^* \alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$$

コヒーレント状態による経路積分の構成

$$\langle \alpha_{\mathrm{F}} | e^{-\beta \mathcal{H}} | \alpha_{\mathrm{I}} \rangle = \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d\alpha_i \, d\alpha_i^*}{\pi} w(\alpha_i^* \alpha_i) \prod_{j=1}^{N} \langle \alpha_j | e^{-\epsilon \mathcal{H}} | \alpha_{j-1} \rangle,$$

$$\epsilon = \frac{\beta}{N}, \; \alpha_N = \alpha_{\mathrm{F}}, \; \alpha_0 = \alpha_{\mathrm{I}}$$

$$\langle \alpha_j | e^{-\epsilon \mathcal{H}} | \alpha_{j-1} \rangle = \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle (1 - \epsilon \alpha_j^* \alpha_{j-1} + O(\epsilon^2))$$

調和振動子の場合

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle (1 - \epsilon \alpha_j^* \alpha_{j-1}) = e^{(1-\epsilon)\alpha_j^* \alpha_{j-1}} = e^{e^{-\epsilon} \alpha_j^* \alpha_{j-1}}$$

一般の場合を考えるためには指数関数にこだわりすぎてはダメ！

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle (1 - \epsilon \alpha_j^* \alpha_{j-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^* \alpha_{j-1})^n}{\gamma_n} (1 - \epsilon \alpha_j^* \alpha_{j-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^* \alpha_{j-1})^n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \epsilon \right)$$

$$\left[= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-\epsilon} \alpha_j^* \alpha_{j-1})^n}{n!} \quad \text{(調和振動子)} \right]$$

$$\int \frac{d\alpha_j \, d\alpha_j^*}{\pi} w(\alpha_j^* \alpha_j) \langle \alpha_{j+1} | (1 - \epsilon \mathcal{H}) | \alpha_j \rangle \langle \alpha_j | (1 - \epsilon \mathcal{H}) | \alpha_{j-1} \rangle$$

$$= \int_0^\infty du \, w(u) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{j+1}^* \alpha_{j-1})^n u^n}{\gamma_n^2} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \epsilon \right)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{j+1}^* \alpha_{j-1})^n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \epsilon \right)^2$$

$$\langle \alpha_{\mathrm{F}} | (1 - \epsilon \mathcal{H})^N | \alpha_{\mathrm{I}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_N^* \alpha_0)^n}{\gamma_n} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \epsilon \right)^N$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\epsilon\right)^{\color{red}N} = e^{-\beta\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}}$$

$$\lim_{N\to\infty}\langle\alpha_{\mathrm{F}}|(1-\epsilon\mathcal{H})^N|\alpha_{\mathrm{I}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_{\mathrm{F}}^*\alpha_{\mathrm{I}})^n}{\gamma_n}e^{-\beta{\color{red}\mathcal{E}_n}}$$

$$\gamma_n = \prod_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k \quad\Longrightarrow\quad \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \mathcal{E}_n$$

コヒーレント状態を用いた経路積分により、エネルギー固有値が求められた！

8　まとめ

- 超対称性と形状不変性によって厳密に解けるSchrödinger方程式は多数存在する
- その多くの系について正弦座標が存在し、Heisenberg形式での厳密解が求まる
- これらの系に関する経路積分はDuru-Kleinertの経路積分を形式的な連続表示で議論したものしか知られていない
- 正弦座標に付随して生成・消滅演算子が定義される
- 消滅演算子の固有ベクトルとしてコヒーレント状態を定義
- コヒーレント状態を用いた経路積分の構成を行った
- これによりエネルギー固有値が見出されることも確認した