柏太郎氏退職記念研究会「量子論の発展と場の理論の現状」
2015年1月10日

拘束系の非同値量子化

谷村 省吾
名古屋大学情報科学研究科

参考文献：McMullan-Tsutsui (1994, 1995), Ohnuki-Kitakado (1992, 1993), Tanimura (1993), Tanimura-Tsutsui (1995, 1997), Tanimura-Iwai (2000)

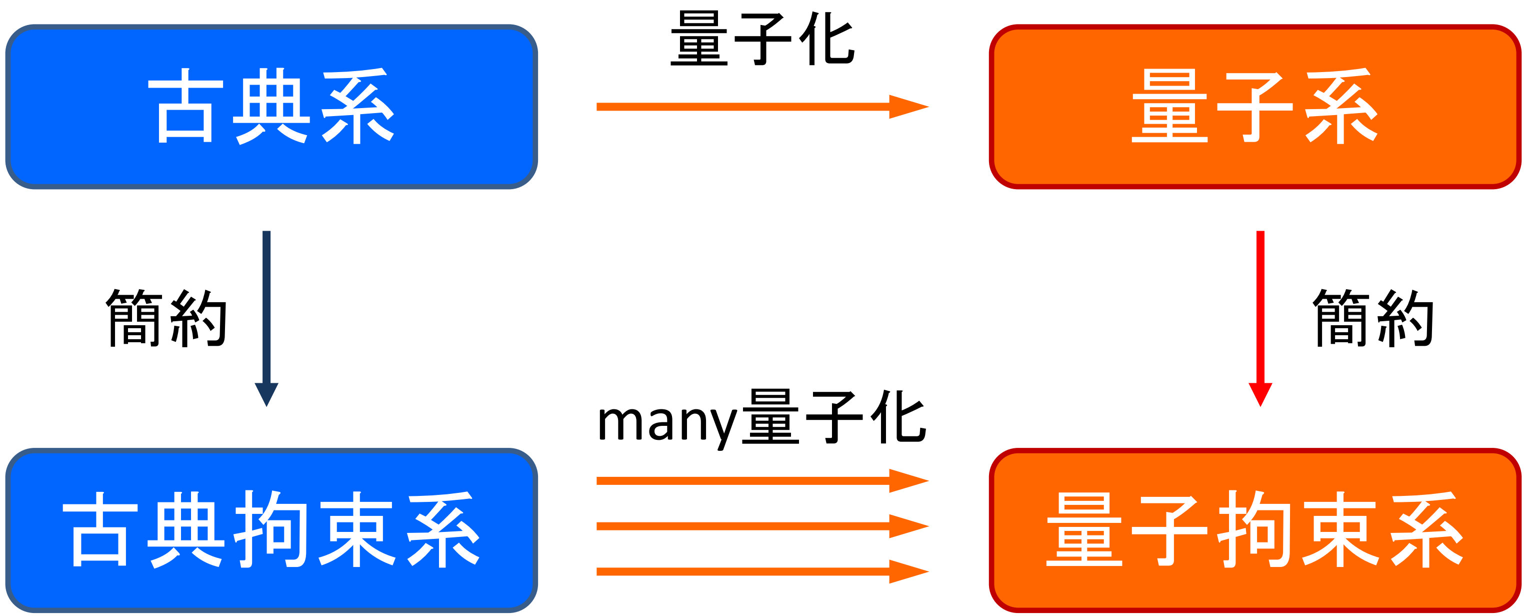
私と柏太郎氏の関係

- 私は1990年4月から95年3月まで名古屋大学E研の大学院生だった。
- 柏太郎さんの名前は、誰からともなく聞いて知っていた。『経路積分』（初版1992年）の大貫義郎氏との共著者、大貫氏の退官記念講演会で講演をした人、E研コロキウム講演をした人、高橋康氏の共同研究者として認識していた。
- 1994年3月、福岡工業大学での物理学会の後、1週間ほど九州大学素粒子論研究室に泊まり込み訪問させてもらった。その頃は、Berry phase や light cone quantization の話で盛り上がっていた。

今日のテーマ

量子化って何だろう、と考えること。
その意外性を探ること。

話題　その1



拘束系の量子化の際に無数の非同値な量子化が存在する。

拘束系

- 古典力学系

  ここでは、ハミルトン力学系を指す。$2n$ 次元の相空間と正準構造を持つ。

- 拘束系 (constraint system)

  保存則や幾何学的束縛条件によって自由度が少なくなった系。

  もとの力学系から自由度を減らした系を構成する手続きを簡約(reduction)という。DiracやMarsden-Weinsteinが定式化。

例:平面上の円周に拘束

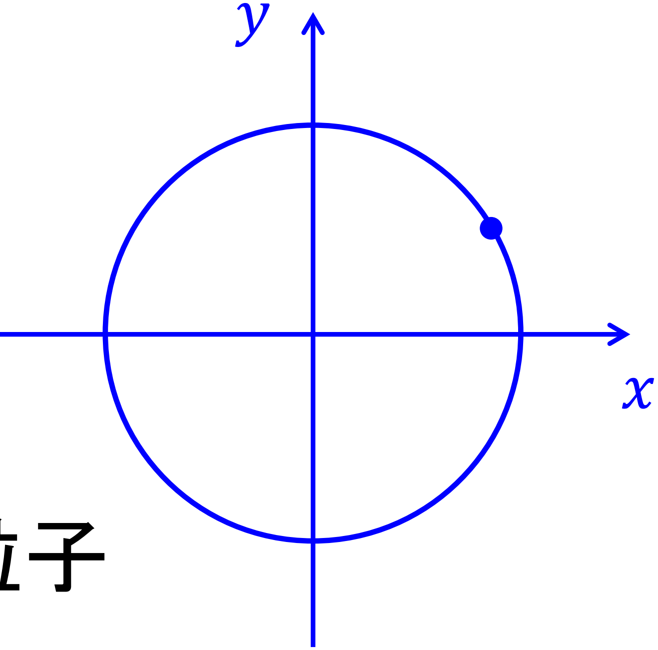
平面上の粒子

$$H = \frac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2\right) + V(x, y)$$

束縛力

$$V(r) = \begin{cases} \text{有限} & (r = r_0) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$



半径 r_0 の円周に拘束された粒子

古典系の簡約

もとの正準1形式、ポアソン括弧

$$\theta = p_x dx + p_y dy = p_r dr + p_\phi d\phi$$

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

$$p_r = \frac{1}{r}\left(xp_x + yp_y\right), \qquad p_\phi = xp_y - yp_x$$

$$\{r, p_r\} = 1, \qquad \{\phi, p_\phi\} = 1$$

拘束条件 $r = r_0$ を課した後の力学系

$$\tilde{\theta} = p_\phi d\phi, \qquad \{\phi, p_\phi\} = 1$$

量子化

Heisenberg, Born, Jordan, Dirac流の量子化:

1. 実数値関数を自己共役演算子で置き換える。
2. Poisson括弧を交換関係で置き換える。
3. そのような演算子代数の既約表現Hilbert空間を構成する。

$$\{A, B\} = C \quad \to \quad \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$$

注:これはあくまで量子化の方針を述ただけで、この置き換え規則をいつでも忠実に実行できるわけではない。実際、q, p のすべての多項式の忠実な演算子表現はできないという Groenewold-van Hove の No-Go theorem が証明されている。

円周上の量子化の問題

- ϕ と $\phi + 2\pi n$ は同一点を表す。
- 角度座標 $-\infty < \phi < \infty$ は円周の点と一対一対応しない。
- 角度演算子 $\hat{\phi}$ があったとすると、スペクトルと円周の点が一対一対応しない。
- 関数 $U = e^{i\phi}$ の値なら、円周の点と一対一対応する。
- 自己共役演算子としての角度演算子を用いずに、ユニタリ演算子 $\hat{U}$ を代数の生成元として用いる。

Ohnuki-Kitakado (1992, 1993)

円周上の量子化

ポアソン括弧を交換関係に置き換える:

$$\{A, B\} = C \quad \rightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$$

$$\{\phi, P\} = 1$$

$$\left\{e^{i\phi}, P\right\} = ie^{i\phi}$$

$$\{U, P\} = iU \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\widehat{U}, \widehat{P}] = i\widehat{U}$$

自己共役演算子$\widehat{P}$とユニタリ演算子$\widehat{U}$を生成元とし、これを基本関係式とする代数を、円周上の量子力学代数と定める(大貫-北門代数)。

$$[\widehat{P}, \widehat{U}] = \hbar\widehat{U}$$

無限個の非同値表現

- 大貫-北門代数の既約表現
- 任意の実数 α を固定して、整数 n に対して
$$\hat{P}|n+\alpha\rangle = \hbar(n+\alpha)|n+\alpha\rangle$$
$$\hat{U}|n+\alpha\rangle = |n+1+\alpha\rangle$$
とおいて、$\{\,|n+\alpha\rangle \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ を完全系とするヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\alpha$ が既約表現。
- パラメータ $0 \leq \alpha < 1$ の値に応じて非同値な表現が存在。

誘導されたゲージ場

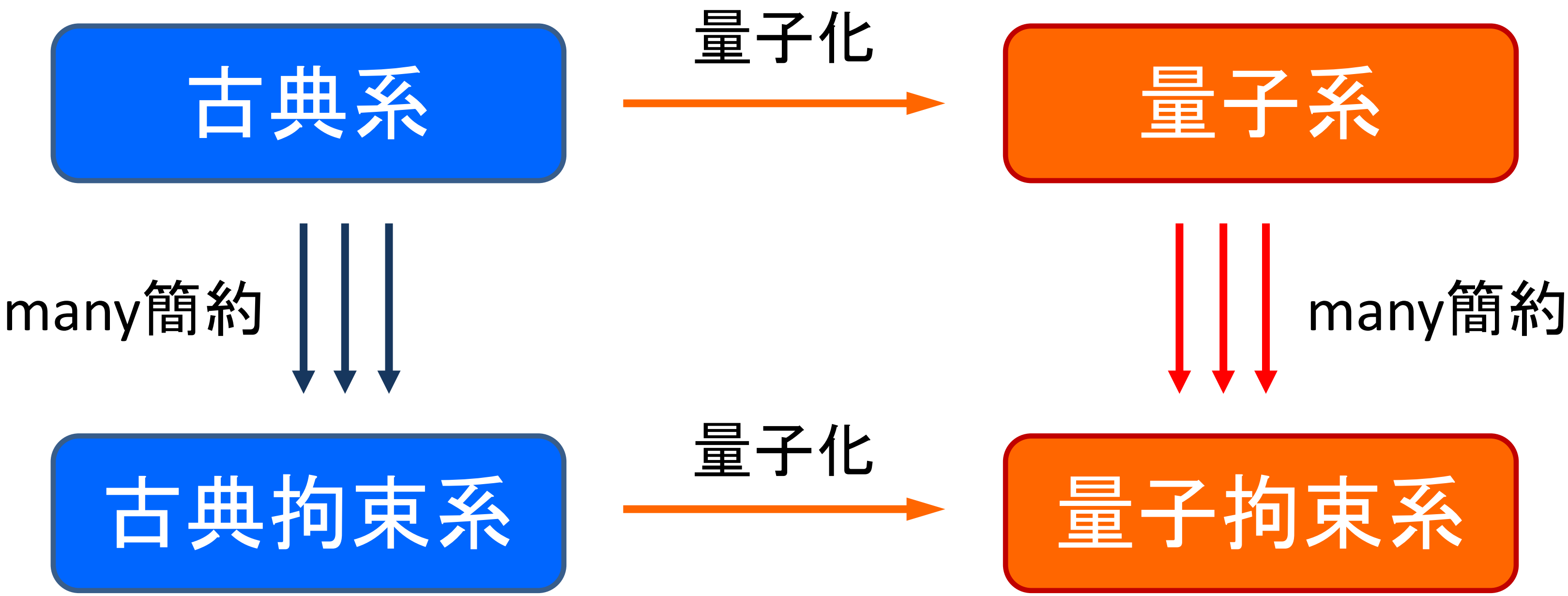
- 座標表示の波動関数: $\chi(\phi) \in L^2(S^1) \cong \mathcal{H}_\alpha$

$$\hat{P}\chi(\phi) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\phi} + i\alpha\right)\chi(\phi)$$

$$\hat{U}\chi(\phi) = e^{i\phi}\chi(\phi)$$

- 運動量演算子が共変微分になる。
- 非同値表現に伴ってAharonov-Bohm効果と同等なゲージ場がbuilt-in される。

話題　その2



簡約化の際に無数の非同値な拘束系が誘導される。

例:4次元から3次元への簡約

- 4次元配位空間 (q_0, q_1, q_2, q_3)

$$\text{スピノル}\quad \xi = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 \\ iq_1 - q_2 \end{pmatrix}$$

- 3次元配位空間 (x_1, x_2, x_3)
- Hopf写像 $\Pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\dagger \sigma_1 \xi \\ \xi^\dagger \sigma_2 \xi \\ \xi^\dagger \sigma_3 \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ {q_0}^2 + {q_3}^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 \end{pmatrix}$$

ホップ写像の$U(1)$対称性

Hopf写像　$\Pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\dagger \sigma_1 \xi \\ \xi^\dagger \sigma_2 \xi \\ \xi^\dagger \sigma_3 \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q_0 q_2 + 2q_1 q_3 \\ 2q_0 q_1 + 2q_2 q_3 \\ {q_0}^2 + {q_3}^2 - {q_1}^2 - {q_2}^2 \end{pmatrix}$$

は$\xi \mapsto e^{i\gamma}\xi$という変換の下で不変。

$$\xi = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 \\ iq_1 - q_2 \end{pmatrix} \longmapsto e^{\frac{-1}{2}i\lambda} \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 \\ iq_1 - q_2 \end{pmatrix}$$

この$U(1)$変換の生成元（＝保存量）

$$J = \frac{1}{2}(-q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_1 p_2 + q_2 p_1)$$

Hopf写像に隠れているゲージ場

- 正準1形式

$$\theta = p_0 dq_0 + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3$$
$$= \pi_1 dx_1 + \pi_2 dx_2 + \pi_3 dx_3 + JA$$

- 4次元極座標 (r, θ, ϕ, ψ)

$$\xi = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 \\ iq_1 - q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{r} e^{-\frac{i}{2}\phi\sigma_3} e^{-\frac{i}{2}\theta\sigma_2} e^{-\frac{i}{2}\psi\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = d\psi + \cos\theta\, d\phi$$

$$B = dA = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$$ モノポール磁場

簡約古典力学系

保存量Jと共役な変数ψを自由度低減した後の力学変数$(x_1, x_2, x_3, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$に対する正準2形式

$$\begin{aligned}\omega &= d\theta \\ &= d\pi_1 \wedge dx_1 + d\pi_2 \wedge dx_2 + d\pi_3 \wedge dx_3 + JdA\end{aligned}$$

$$B = dA = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{r^{3/2}}$$

正準2形式(symplectic form)の逆行列はPoisson括弧：

$$\{x_i, \pi_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijk} J \frac{x_k}{r^{3/2}}$$

簡約した後、量子化

簡約系を量子化すると（量子系を簡約しても同じ結果）、

$$\hat{J} \longrightarrow \frac{1}{2}\hbar m \quad (m\text{：整数})$$

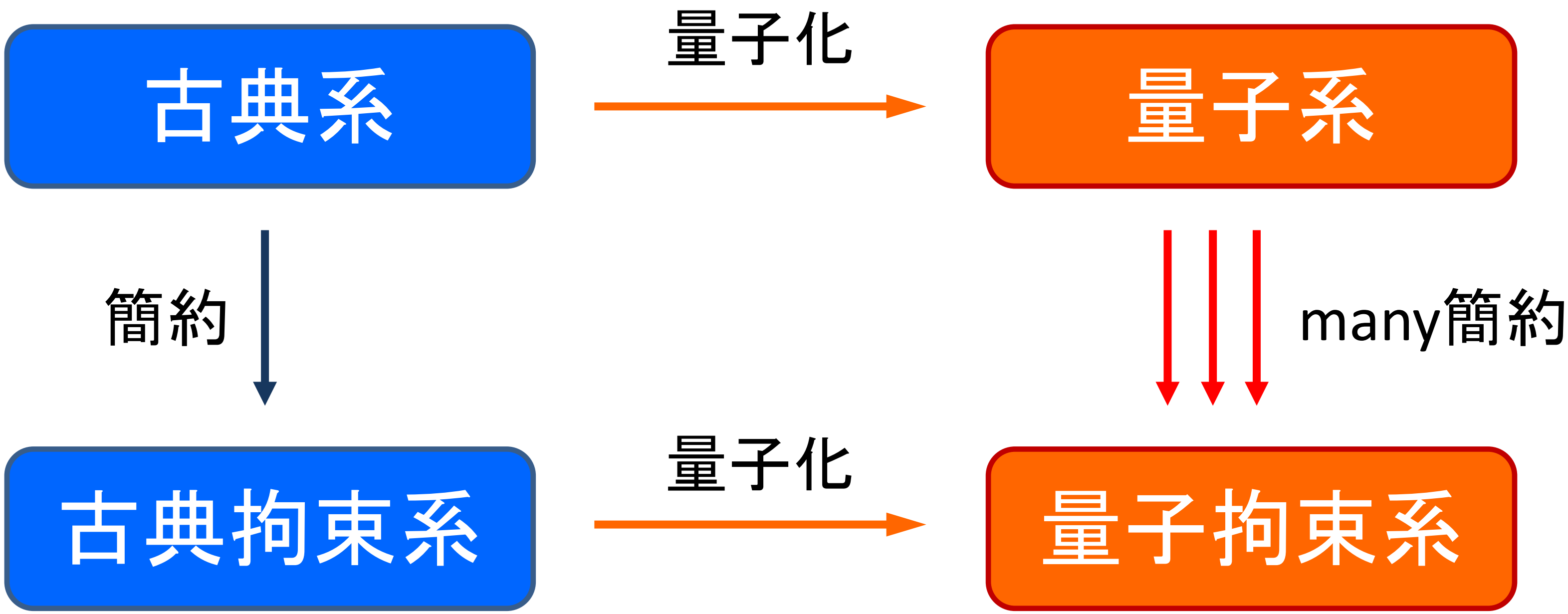
$$\left[\hat{x}_i, \hat{\pi}_j,\right] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad \left[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j\right] = i\hbar^2 \varepsilon_{ijk} \frac{m}{2}\frac{\hat{x}_k}{\hat{r}^{3/2}}$$

モノポール数mの磁場中を動く荷電粒子の力学と等価。

4次元配位空間系を$U(1)$対称性で簡約すると、モノポール付きの3次元配位空間の量子系が誘導される。

モノポール数 $m = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ ごとにに非同値な量子系。

話題　その3



量子系の簡約の際に無数の非同値な拘束系が誘導される。

対称性を持つ多様体上の代数

- リーマン多様体 M にリー群 G が等長的に作用している（推移的とは限らない）。
- 観測可能量：実数値関数 $f(x) \in C(M)$
- 群作用：$(\lambda_g f)(x) \coloneqq f(g^{-1}x)$
- 量子化される代数

  関数 f ごとに自己共役演算子 $\hat{f}$

  群の元 g ごとにユニタリ演算子 $\widehat{U}(g)$

  基本関係式　i) $\widehat{f_1}\,\widehat{f_2} = \widehat{f_2}\,\widehat{f_1}$

  ii) $\widehat{U}(g)\,\hat{f}\,\widehat{U}^{\dagger}(g) = \widehat{\lambda_g f}$

  iii) $\widehat{U}(g_1)\widehat{U}(g_2) = \widehat{U}(g_1 g_2)$

- ハミルトニアンは $\widehat{H} = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ とする。

対称性による簡約

もしも、G-不変な量だけが観測可能だとしたら、

- observable algebra
  $C^G(M) \coloneqq \{f: M \to \mathbb{R} \mid \forall g \in G, \forall x \in M, f(gx) = f(x)\}$
  これは$C(M)$の sub-algebra.
- $C(M)$ の忠実な表現空間 $L^2(M)$ は $C^G(M)$ の表現としては可約であり、分解
  $$L^2(M) = \bigoplus_\chi \mathcal{H}^{\chi *} \otimes L^2(M; \mathcal{H}^\chi)^G$$
  が成立し、既約成分ごとに$C^G(M)$の非同値な表現になる。ただし、$(\mathcal{H}^\chi, \rho^\chi)$ は G の既約ユニタリ表現であり、
  $L^2(M; \mathcal{H}^\chi)^G \coloneqq \{\psi: M \to \mathcal{H}^\chi \mid \psi(gx) = \rho^\chi(g)\psi(x)\}$
- 同変波動関数は群表現のベクトル値関数であり、ラプラシアンは群Gのゲージ場による共変微分になる。

例: 原子分子の簡約系

- 3次元空間中の N 個の原子からなる分子
- 対称性:重心の平行移動と重心周りの回転（ユークリッド群 $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$）
- この対称性について簡約した系は、多原子の相対運動だけを記述する系になる。
- 全体の角運動量(j, m)ごとに異なった簡約量子系が構成され、$SO(3)$をゲージ群とする共変微分構造が誘導される（ゲージ場はコリオリ力を表し、ホロノミーは「猫の宙返り」を表す）。

最後の話題: 経路積分

- 遷移確率振幅(propagator): $K(x',t';x,t)$
- 合成則:

$$K(x_2,t_2;x_0,t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x_2,t_2;x_1,t_1)K(x_1,t_1;x_0,t_0)dx_1$$

- 規格化条件: $\int|K(x',t';x,t)|^2dx'=1$
- 無限小時間と作用積分: $K(x',t+\Delta t;x,t)=e^{\frac{i}{\hbar}L\Delta t}$
- 無限分割極限(形式的経路積分):

$$K(x',t';x,t)=\lim_{n\to\infty}\iiint K\cdots K dx_{n-1}\cdots dx_1$$

$$=\int e^{\frac{i}{\hbar}\int Ldt}Dx$$

経路積分と非同値量子化と誘導ゲージ場

直線$\mathbb{R}$上の量子系を簡約して円周S^1上の量子系を構成する場合、

- ナイーブな簡約法：周期境界条件

$$K_{S^1}(x';x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(x'+2\pi n;x)$$

- 拡張版：重み付き簡約

$$K_{S^1}(x';x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \, K(x'+2\pi n;x)$$

- 経路積分の合成則　⇒
  ω_n は $|\omega_n| = 1,\ \omega_m \omega_n = \omega_{m+n}$ を満たす複素数

経路積分と非同値量子化と誘導ゲージ場

- 重み係数　$\omega_n = e^{i2\pi\alpha n}$　$(0 \leq \alpha < 1)$
- 拡張版：重み付き簡約された経路積分

$$K_{S^1}(x';x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\alpha n}\, K(x' + 2\pi n; x)$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int\left(\hbar\alpha\dot{x}+\frac{m}{2}\dot{x}^2-V(x)\right)dt} Dx$$

重み付けパラメータ $\alpha \Leftrightarrow$ ゲージ場 $A = \hbar\alpha$ と同等。

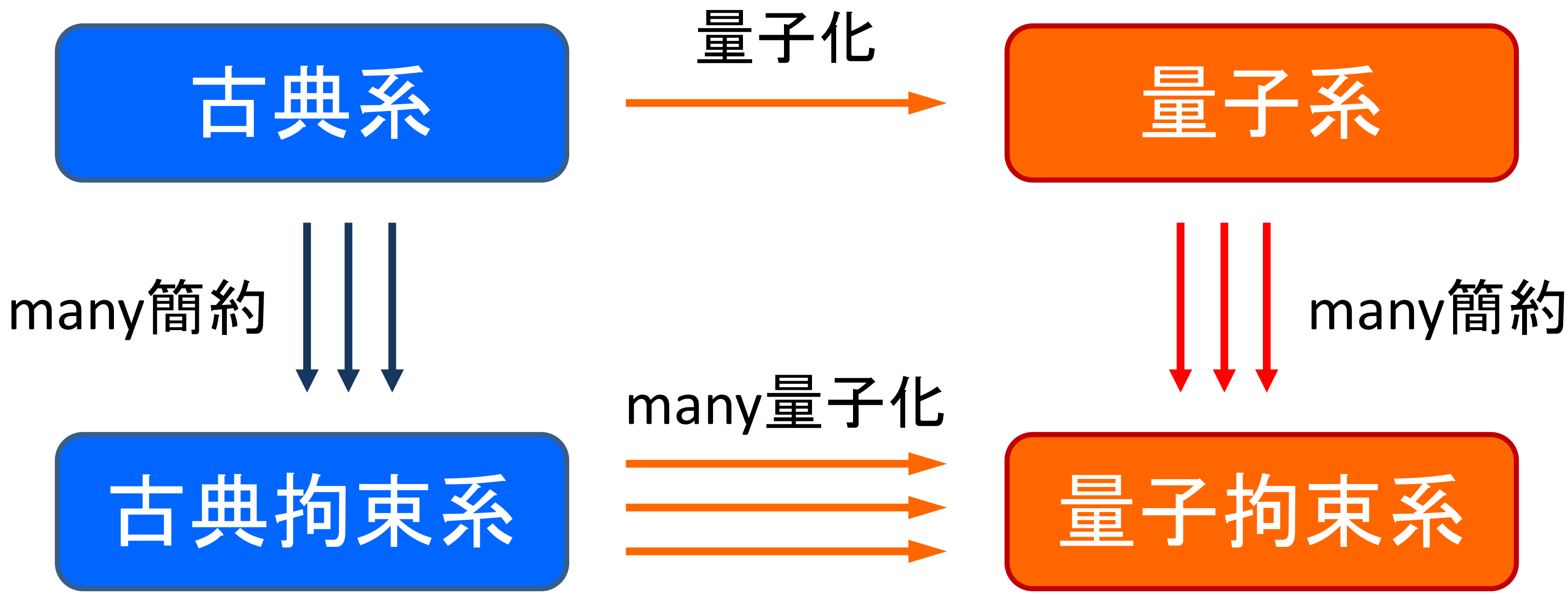
経路積分と非同値量子化と誘導ゲージ場

- 円周への簡約は、$M = \mathbb{R},\ G = \mathbb{Z},\ \frac{M}{G} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} = S^1$
- 重み係数は群のユニタリ表現 $\rho_\alpha(n) = e^{i2\pi\alpha n}$
- 一般に、リーマン多様体Mにリー群Gが等長的に作用している場合、群のユニタリ表現 $\rho^\chi(g)$ を重み係数として、M/G 上の経路積分が誘導される:

$$K^\chi(x';x) = \int_G \rho^\chi(g) K(g^{-1}x';x)\, dg$$

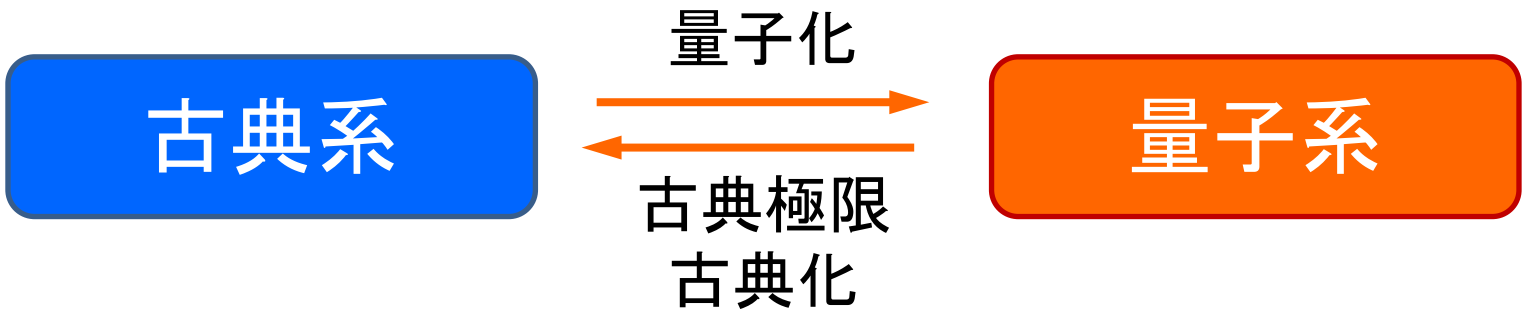
$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) + \rho^\chi(A)\dot{x}\right)dt} Dx$$

Take-home message



表に出ない自由度があると、ゲージ構造と非同値な量子系が誘導される。

Take-home question



量子化って何だろう？

ある種の reverse engineering. 原初には量子系があり、我々は、量子系の影のような古典系を見て、本体であるところの量子系を想像する。そのプロセスが量子化なのだろう。経路積分もそのアプローチの一つ。

柏さん、
私に物理学の問題を考える
機会･ヒントをくださって
ありがとうございました。