演習 場の量子論:訂正

柏　太郎

平成 26 年 6 月 9 日

例題2.3　 p.10 p.11 を以下のように訂正。
（1）図1.1 は消去。
（２）解を以下のように訂正。(式番号は本文中のものと、この中の物とがある)
==========
解）$f(x)=0$ にいくつかののゼロ点, $x=\alpha_i; i=1,2,\ldots,$ がある時のデルタ関数の性質、

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\alpha_i)|}\ \delta(x-\alpha_i)\ ; \tag{1}$$

(証明には、ガウス型関数によるデルタ関数の表示、

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\mapsto 0}\sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon}}\ ; \tag{2}$$

に着目しよう。ひとつのゼロ点 $x=x_i$ のまわりで $f(x)=(x-x_i)f'(x_i)+O\left((x-x_i)^2\right)$ と展開して、

$$\begin{aligned}
\delta(f(x)) &= \lim_{\epsilon\mapsto 0}\sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon}}\exp\left[-\frac{(x-x_i)^2|f'(x_i)|^2}{2\epsilon}\left\{1+O\left(x-x_i\right)\right\}\right] \\
&\overset{\epsilon/|f'(x_i)|^2\mapsto\epsilon'}{=} \frac{1}{|f'(x_i)|}\lim_{\epsilon'\mapsto 0}\sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon'}}\exp\left[-\frac{(x-x_i)^2}{2\epsilon'}\left\{1+O\left(x-x_i\right)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)\ ;
\end{aligned}$$

となる。それぞれのゼロ点の周りで同じことを繰り返しを行えば (1) が求まる。）を用いると、

$$\delta(p^2-m^2c^2) = \delta\left((p^0)^2-\frac{E^2(\boldsymbol{p})}{c^2}\right) = \frac{c}{2E(\boldsymbol{p})}\left(\delta\left(p^0-\frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right)+\left(p^0+\frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right)\right)\ . \tag{3}$$

ここで、**階段関数**

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1\ ; & x>0\ , \\ 0\ ; & x<0\ , \end{cases} \tag{4}$$

を考えると、

$$\frac{cd^3\boldsymbol{p}}{2E(\boldsymbol{p})} = \theta(p^0)\delta(p^2-m^2c^2)d^4p\ ; \tag{5}$$

である（右辺で p^0 積分を行った)。ローレンツ変換 $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ で d^4p は、

$$d^4p' = \det\Lambda^\mu{}_\nu d^4p \overset{(1.46)}{=} d^4p\ .$$

また、

$$\delta(p'^2-m^2c^2) = \delta(p^2-m^2c^2)\ .$$

基本ローレンツ変換 (1.47) に注意すれば、

$$p'^0 = \frac{p^0+\beta p^3}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,$$

なので、

$$\theta(p'^0)\delta(p'^2 - m^2c^2)d^4p' = \theta\left(\frac{p^0 + \beta p^3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\delta(p^2 - m^2c^2)d^4p$$
$$= \theta\Big(p^0 + \beta p^3\Big)\,\frac{c}{2E(\boldsymbol{p})}\left(\delta\left(p^0 - \frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right) + \delta\left(p^0 + \frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right)\right)d^4p\ .$$

(階段関数で正の量 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ は外した。) デルタ関数の性質 $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$ を用いて、

$$\theta(p'^0)\delta(p'^2 - m^2c^2)d^4p' = \frac{c}{2E(\boldsymbol{p})}$$
$$\times\left[\theta\left(\frac{E(\boldsymbol{p})}{c} + \beta p^3\right)\delta\left(p^0 - \frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right) + \theta\left(-\frac{E(\boldsymbol{p})}{c} + \beta p^3\right)\delta\left(p^0 + \frac{E(\boldsymbol{p})}{c}\right)\right]d^4p\ . \quad (6)$$

(1.43) より、

$$\frac{E(\boldsymbol{p})}{c} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2} > |p^3|\ ,$$

であるから、

$$\frac{E(\boldsymbol{p})}{c} + \beta p^3 > |p^3|(1 \pm \beta) > 0\ ,$$
$$-\frac{E(\boldsymbol{p})}{c} + \beta p^3 < -|p^3|(1 \mp \beta) < 0\ .$$

に注意すれば、階段関数の性質 (4) のため、(6) 右辺第 2 項は落ちて、p^0 積分の結果、

$$\theta(p'^0)\delta(p'^2 - m^2c^2)d^4p' = \frac{c}{2E(\boldsymbol{p})}d^3\boldsymbol{p}\ .$$

これは、(5) であり、

$$\theta(p'^0)\delta(p'^2 - m^2c^2)d^4p' = \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2c^2)d^4p = \frac{c}{2E(\boldsymbol{p})}d^3\boldsymbol{p}\ ,$$

が言えた。

以下余白